

Abschätzung harmonischer Funktionen

Beweisen Sie folgende Variante der Abschätzungen für die Ableitungen einer harmonischen Funktion :

Ist u harmonisch in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$|\partial^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B)}$$

für jede abgeschlossene Kugel $B = B_r(x_0) \subseteq G$ und jeden Multiindex α der Ordnung k . Hierbei ist

$$\|u\|_{L^1(B)} := \int_B |u(x)| \, dx$$

die Norm von u im Raum $L^1(B)$ und

$$C_0 := \frac{1}{\gamma_n}, \quad C_k := \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\gamma_n}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

wobei γ_n das Volumen der Einheitskugel im \mathbb{R}^n bezeichnet.